Penktadienis, 2015 m. liepos 10 d.

1 uždavinys. Baigtinę plokštumos taškų aibę $\mathcal{S}$ vadinsime *subalansuota*, jei bet kuriems dviems aibės $\mathcal{S}$ taškams A ir B visada atsiras toks aibės $\mathcal{S}$ taškas C, kad $AC = BC$. Sakysime, kad aibė $\mathcal{S}$ *neturi centro*, jei kokius beimtume tris skirtingus aibės $\mathcal{S}$ taškus A, B ir C, su jokiu aibės $\mathcal{S}$ tašku P negalioja lygybė $PA = PB = PC$.

a) Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju $n \geqslant 3$ egzistuoja subalansuota aibė, sudaryta iš lygiai n taškų.

b) Raskite visus natūraliuosius $n \geqslant 3$, su kuriais egzistuoja subalansuota ir neturinti centro aibė, sudaryta iš lygiai n taškų.

2 uždavinys. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, c), su kuriais kiekvienas iš skaičių

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

yra dvejeto laipsnis.

(*Dvejeto laipsniais yra vadinami natūralieji skaičiai* 2^n, *kur* n *yra sveikasis neneigiamas skaičius.*)

3 uždavinys. Duotas smailusis trikampis ABC, kuriame $AB > AC$. Tegul Γ yra trikampio ABC apibrėžtinis apskritimas, H – to trikampio ortocentras, o F – aukštinės, nuleistos iš A į kraštinę BC, pagrindas. Tegul M yra kraštinės BC vidurio taškas. Tegul Q yra toks apskritimo Γ taškas, kad $\angle HQA = 90°$, o K toks apskritimo Γ taškas, kad $\angle HKQ = 90°$. Be to, taškai A, B, C, K ir Q yra visi skirtingi ir priklauso apskritimui Γ būtent tokia tvarka.

Įrodykite, kad trikampių KQH ir FKM apibrėžtiniai apskritimai liečia vienas kitą.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais

Šeštadienis, 2015 m. liepos 11 d.

4 uždavinys. Trikampio ABC apibrėžtinis apskritimas yra Ω, o taškas O yra to apskritimo centras. Apskritimas Γ, kurio centras A, kerta atkarpą BC taškuose D ir E taip, kad taškai B, D, E ir C yra visi skirtingi ir priklauso tiesei BC būtent tokia tvarka. Tegul F ir G yra apskritimų Γ ir Ω sankirtos taškai, ir A, F, B, C ir G priklauso apskritimui Ω būtent tokia tvarka. Tegul K yra antrasis atkarpos AB ir apibrėžto apie trikampį BDF apskritimo sankirtos taškas. Tegul L yra antrasis atkarpos CA ir apibrėžto apie trikampį CGE apskritimo sankirtos taškas.

Tarkime, kad tiesės FK ir GL yra skirtingos ir kertasi taške X. Įrodykite, kad taškas X priklauso tiesei AO.

5 uždavinys. Tegul $\mathbb{R}$ žymi visų realiųjų skaičių aibę. Raskite visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenkinančias lygybę

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \ = \ x + f(x+y) + yf(x)$$

su visais realiaisiais skaičiais x ir y.

6 uždavinys. Sveikųjų skaičių seka $a_1, a_2, \ldots$ turi tokias savybes:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ su visais $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ su visais $1 \leqslant k < \ell$.

Įrodykite, kad egzistuoja tokie du sveikieji teigiami skaičiai b ir N, kad

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

su visais sveikaisiais m ir n, tenkinančiais nelygybę $n > m \geqslant N$.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais