Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
Kęstutis Naujokaitis
Leidykla TYTO ALBA
Leidykla TEV
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

Organizuoja
VILNIAUS UNIVERSITETAS

XXX LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas
2015-09-26

1. Išspręskite lygtį
$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt[3]{x}.$$

2. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} x^2+3xy = x+3y, \\ y^2 - xy = 3x + y. \end{cases}$$

3. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su bet kokiais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygybę
$$f(x+y)f(y) = f(x+xf(y)).$$

4. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybę
$$(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+y^2}+y) = 1.$$
Raskite visas galimas sumos $x+y$ reikšmes.

5. Įrodykite, kad bet kokiems neneigiamiems skaičiams a, b, c galioja nelygybės
$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq (a+b+c)^2.$$

6. a) Su kokiu didžiausiu natūraliuoju skaičiumi k skaičius 120! dalijasi iš 12^k? b) Su kokiu didžiausiu natūraliuoju skaičiumi k skaičius 240! dalijasi iš 12^k?

7. Triženklis skaičius su nenuliniais skaitmenimis pasižymi tokia savybe: jo skaitmenis surikiavus bet kuria tvarka, gautas triženklis skaičius niekada nesidalija iš 4. Kiek yra tokių triženklių skaičių su nenuliniais skaitmenimis?

8. Dviejų gretimų natūraliųjų skaičių sandaugą vadinkime *beveik kvadratu*. Įrodykite, kad bet kuris beveik kvadratas lygus dviejų beveik kvadratų santykiui.

9. Raskite visus pirminių skaičių ketvertus (p, q, r, s), tenkinančius nelygybes $0 < p < q < r < s$ ir lygtį
$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{pqrs}.$$

10. Kiekvienam natūraliajam skaičiui $n > 1$ skaičiai
$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$
užrašomi kaip nesuprastinamos trupmenos ir apskaičiuojama tų trupmenų skaitiklių suma $f(n)$. Su kuriomis n reikšmėmis skaičius $f(2015n) - f(n)$ yra lyginis?

11. Lentoje užrašytas skaičius 12. Vienu ėjimu leidžiama nutrinti lentoje užrašytą skaičių N ir užrašyti vieną iš skaičių $2N+1$ ir $\frac{N}{3}$ (skaičius turi likti sveikasis). Ar taip galima gauti skaičių a) 29; b) 4095; c) 100?

12. Tinklinio turnyre bet kurios dvi komandos sužaidė tarpusavyje po vieną kartą. Po kiekvienų rungtynių laimėjusi komanda gauna 1 tašką, o pralaimėjusi taškų negauna. Lygiųjų tinklinyje nebūna. Turnyrui pasibaigus, mažiausiai taškų surinko vienintelė komanda. Bet kuri kita komanda, žaisdama prieš galutinėje lentelėje mažiau už ją taškų surinkusias komandas, patyrė lygiai vieną pralaimėjimą.

    a) Ar galėjo tokiame turnyre dalyvauti lygiai 7 komandos?
    b) Ar galėjo tokiame turnyre dalyvauti lygiai 6 komandos?

13. Vieną šeštadienį Nestas Manauskas sugalvojo 25-ženklį natūralųjį skaičių. Jame nebuvo kitų skaitmenų be 1, 2, 3 ir 4, o skaitmenų 1 ir 2 buvo po lygiai. Tada Nestas juokais užrašė ir visus likusius tokius 25-ženklius skaičius. Sekmadienį jis jau ne juokais užrašė visus 50-ženklius natūraliuosius skaičius, kuriuose yra po 25 vienetus ir 25 dvejetus. Kuriame sąraše yra daugiau skaičių – šeštadieniniame ar sekmadieniniame? Atsakymą pagrįskite.

14. Kiekvienas 10×10 lentelės langelis nuspalvintas viena iš kelių spalvų. Tiek bet kurioje eilutėje, tiek bet kuriame stulpelyje panaudotos daugiausiai 5 spalvos. Kiek daugiausiai spalvų galėjo būti panaudota, spalvinant lentelę?

15. Lentoje parašytas skaičius 1345. Jaunutis ir Algirdas, pakaitomis atlikdami ėjimus, žaidžia tokį žaidimą. Vienu ėjimu žaidėjas turi iš lentoje esančio skaičiaus atimti bet kurį jo teigiamą daliklį arba bet kurių jo skirtingų teigiamų daliklių sumą ir gautąjį skaičių užrašyti lentoje vietoj pradinio. Pralaimi tas žaidėjas, kuris savo ėjimu lentoje užrašo už 1 mažesnį skaičių. Kuris žaidėjas turi pergalės strategiją, jei pirmąjį ėjimą atlieka Jaunutis?

16. Lentelę 2×3 sudaro 6 vienetiniai langeliai. Lentelės įstrižainė dalija vieną iš langelių į trikampį ir penkiakampį. Raskite penkiakampio plotą.

17. Nelygiašonio trikampio ABC kraštinėje AC pažymėtas taškas D. Trikampiai ABD ir BCD yra panašūs. Raskite kraštinės AB ilgį, jei $AC = 10$, $BC = 8$.

18. Lygiašonės trapecijos plotas yra 180, šoninės kraštinės ilgis yra 13, o trumpesniojo pagrindo ilgis yra 20. Raskite kito trapecijos pagrindo ilgį.

19. Į trikampį ABC su stačiuoju kampu B įbrėžtas apskritimas su centru I, liečiantis kraštines AB, BC ir AC atitinkamai taškuose F, D ir E. Tiesės CI ir EF kertasi taške M, o DM ir AB – taške N. Įrodykite, kad a) $AI = ND$; b) $FM \cdot EC = EI \cdot EM$.

20. Lygiagretainis $ABCD$ tenkina nelygybes $AB < AC < BC$. Tiesės, liečiančios trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą ω taškuose E ir F, kertasi taške D. Atkarpos AD ir CE turi bendrą tašką, ir $\angle ABF = \angle DCE$. Raskite $\angle ABC$.