TAM TIKRŲ ALGEBRINIŲ SKAIČIŲ IR POLINOMŲ ARITMETINĖS SAVYBĖS

PAULIUS DRUNGILAS

Lietuvos matematikų draugijos jaunųjų matematikų premijos konkursui teikiamas darbas, paremtas šiomis publikacijomis:

- P. Drungilas, A. Dubickas, *Multiplicative dependence of two integers shifted by a root of unity*, Proceedings of the American Mathematical Society **147** (2) (2019), 505–511.
- P. Drungilas, J. Jankauskas, J. Šiurys, *On Littlewood and Newman polynomial multiples of Borwein polynomials*, Mathematics of Computation **87** (311) (2018), 1523–1541.
- P. Drungilas, A. Dubickas, J. Jankauskas, *On relations for rings generated by algebraic numbers and their conjugates*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **194** (2) (2015), 369–385.
- P. Drungilas, A. Dubickas, F. Luca, *On the degree of the compositum of two number fields*, Mathematische Nachrichten **286** (2-3) (2013), 171–180.
- P. Drungilas, A. Dubickas, C.J. Smyth, *A degree problem of two algebraic numbers and their sum*, Publicacions Matematiques **56** (2) (2012), 413–448.

[1] straipsnyje įrodyta Madritsch ir Ziegler iškelta hipotezė, kad bet kuriems natūraliesiems skaičiams $m > n$ ir $k \geqslant 3$, skaičiai $m - \zeta_k$ ir $n - \zeta_k$ yra multiplikatyviai nepriklausomi, išskyrus atvejį $(n, k) = (1, 6)$; čia ζ_k yra k-tojo laipsnio primityvioji šaknis iš vieneto.

Polinomai, kurių kiekvienas koeficientas lygus 0 arba 1, vadinami Njūmeno polinomais, o polinomai, kurių kiekvienas koeficientas lygus -1 arba 1 vadinami Litlvudo polinomais. Panašiai, polinomai, kurių kiekvienas koeficientas priklauso aibei $\{-1, 0, 1\}$, vadinami Borveino polinomais. Šios polinomų klasės tyrinėjamos nuo seno. Pirmieji jas sistematiškai pradėjo nagrinėti Bloch ir Polya.

Tegul $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}$ – baigtinė aibė, $p(x)$ – polinomas su sveikaisiais koeficientais, kurio vyriausiasis koeficientas lygus 1 ir kuris neturi kompleksinių šaknų ant vienetinio apskritimo. [2] straipsnyje pristatytas algoritmas, leidžiantis nustatyti ar egzistuoja nenulinis polinomas, kurio visi koeficientai priklauso aibei $\mathcal{D}$ ir kuris dalijasi iš polinomo $p(x)$. Panaudoję šį algoritmą, kiekvienam Borveino polinomui, kurio laipsnis yra ne didesnis už 9, nustatėme ar jis turi

Litlvudo arba Njūmeno kartotinius polinomus. Be to, įrodėme, kad kiekvienas ne didesnio negu 8 laipsnio Borveino polinomas, kuris turi Njūmeno kartotinį polinomą, turi ir Litlvudo kartotinį polinomą.

Šie rezultatai pratęsia Litlvudo ir Njūmeno polinomų klasifikaciją, pradėtą Borwein, Hare, Mossinghoff, Dubicko ir Jankausko.

[3] straipsnyje pristatytas algoritmas, leidžiantis nustatyti ar fiksuoto algebrinio skaičiaus generuoto skaičių kūno elementas priklauso to algebrinio skaičiaus generuotam žiedui. Šis rezultatas kiekvienam fiksuotam algebriniam skaičiui leidžia nustatyti ar visi jo jungtiniai algebriniai skaičiai generuoja tą patį žiedą. Kubiniams sveikiesiems algebriniams skaičiams, remdamiesi Girstmair tyrimais, nustatėme, kad visi kubinio sveikojo algebrinio skaičiaus jungtiniai skaičiai generuoja tą patį žiedą tada ir tik tada, kai jo minimalusis polinomas tenkina tam tikras aitmetines sąlygas. Be to, gavome, kad kiekviename Galua skaičių kūne galima taip parinkti generatorių, kad visi jo jungtiniai skaičiai generuotų tą patį žiedą. Taip pat gavome lengvai praktiškai patikrinamas būtinas ir pakankamas sąlygas, kad racionalusis skaičius priklausytų duoto algebrinio skaičiaus generuotam žiedui.

Trejetas $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ vadinamas *S-trejetu*, jei egzistuoja algebriniai skaičiai α, β ir γ, kurių laipsniai atitinkamai yra a, b, c ir teisinga lygybė $\alpha + \beta + \gamma = 0$. [5] straipsnyje suklasifikavome visus S-trejetus (a, b, c), tenkinančius sąlygas $a \leqslant b \leqslant c$, $b \leqslant 6$. Įrodėme, kad jei trejetas $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tenkina trikampio nelygybę kiekvieno pirminio skaičiaus atžvilgiu, tuomet jis yra S-trejetas. Taip pat buvo gauta dalies rezultatų multiplikatyvioji versija (P-trejetams) ir nagrinėti vadinamieji C-trejetai. [4] straipsnyje S-trejetų klasifikacija buvo pratęsta. Taip pat gautas algoritmas, leidžiantis patikrinti, ar duotas trejetas yra C-trejetas.

Literatūra

[1] P. Drungilas, A. Dubickas, *Multiplicative dependence of two integers shifted by a root of unity*, Proceedings of the American Mathematical Society **147** (2) (2019), 505–511.

[2] P. Drungilas, J. Jankauskas, J. Šiurys, *On Littlewood and Newman polynomial multiples of Borwein polynomials*, Mathematics of Computation **87** (311) (2018), 1523–1541.

[3] P. Drungilas, A. Dubickas, J. Jankauskas, *On relations for rings generated by algebraic numbers and their conjugates*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **194** (2) (2015), 369–385.

[4] P. Drungilas, A. Dubickas, F. Luca, *On the degree of the compositum of two number fields*, Mathematische Nachrichten **286** (2-3) (2013), 171–180.

[5] P. Drungilas, A. Dubickas, C.J. Smyth, *A degree problem of two algebraic numbers and their sum*, Publicacions Matematiques **56** (2) (2012), 413–448.

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Matematikos institutas

Email address: paulius.drungilas@mif.vu.lt